

Учебное погружение

«Текстовые задачи, решаемые с помощью наименьшего общего кратного»

ВВЕДЕНИЕ

Общие сведения

Учебное погружение «Текстовые задачи, решаемые с помощью наименьшего общего кратного», было проведено 22–24 ноября 2010 года для учащихся 6–8 классов Отделения развивающего обучения «Умка» школы № 202. В погружении участвовало 45 школьников. Подготовили и провели погружение А. В. Рыбалкина и А. И. Щетников.

Замысел

Школьные задачи на «бассейны», «совместную трапезу», «совместную работу» и т. п. известны с глубокой древности. Во всяком случае, в позднеантичных сборниках школьных задач они уже содержались, и надо думать, что этот учебный материал восходит к ещё более ранней эпохе. К этому же кругу примыкает и ряд задач на движение: «по кругу», «вверх и вниз по реке» и т. п.

В современной школе эти задачи решаются обычно на основе понятия производительности; а задачи на движение — с помощью аналогичного понятия скорости. При решении этих задач, как правило, используются обыкновенные дроби, в которых выражается производительность («бассейн заполнился за 7 часов» = «за 1 час заполнилась $1/7$ бассейна»). Для современной школы характерен также алгебраический подход к решению этих задач, при котором все прямо и косвенно участвующие в задаче величины обозначаются разными буквами, для этих букв составляются несколько уравнений, при этом часть букв сокращается, после чего из системы уравнений извлекаются численные значения искомых величин.

Замысел погружения основан на возвращении к исходной арифметической идее, ради которой, как мы полагаем, все эти задачи и были когда-то придуманы — к идее наименьшего общего кратного. Представлять эту идею мы будем графически: рисуется отрезок, изображающий НОК, и под ним показывается, как другие отрезки укладываются в этом отрезке нацело. Усвоив эту идею, мы приобретаем возможность решать большую часть задач этого круга в уме, пользуясь простейшими числовыми расчётами, выполняемыми, по большей частью, в устном рассуждении.

Структура

Первые два дня погружения проводились по одной и той же схеме.

1 такт (30 минут). Вводный рассказ одного из ведущих: разбор одной задачи в качестве примера.

2 такт (40 минут). Работа в группах. Всем школьникам выдаётся первый листочек с двумя задачами. Каждая группа должна решить назначенную ей задачу и подготовить сообщение; если у неё останется время, она решает также вторую задачу.

3 такт (40 минут). Группы, выбранные жеребьёвкой, рассказывают решения «своих» задач.

Перерыв 10 минут.

4 такт (30 минут). Работа в парах: письменное решение трёх задач со второго листочка.

5 такт (30 минут). Устный разбор решений задач со второго листочка. Совместное решение с залом ещё одной, достаточно сложной задачи.

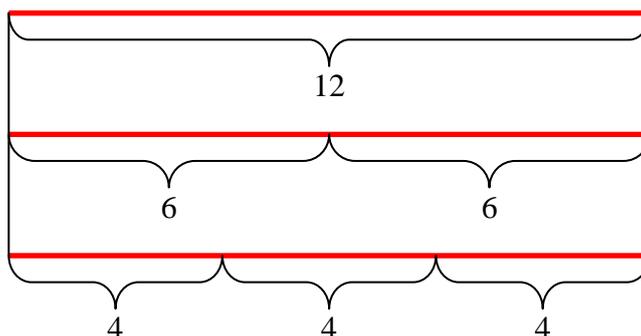
На третий день погружения сразу же проводились 2 и 3 такт, а затем, после небольшого перерыва, проходила математическая карусель по упрощённой форме: без исходного рубежа, 20 задач на зачётном рубеже, все задачи так или иначе связаны с темой погружения.

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

Разобраный пример

1. Маленький коала объедает все листья с эвкалиптового дерева за 12 дней, его мама — за 6 дней, а папа — за 4 дня. За сколько дней это семейство объест все листья с одного эвкалиптового дерева?

Прежде всего, найдём такое время, в котором все времена, перечисленные в условии задачи, укладываются нацело. Очевидно, это время в 12 дней: ведь 12 делится и на 6, и на 4. Теперь зададим главный вопрос, позволяющий решить задачу: **что произошло за эти 12 дней?** Отвечаем на него: за 12 дней маленький коала объест листья с 1 дерева, его мама — с 2 деревьев, папа — с 3 деревьев. Следовательно, все вместе они объедят листья с $1 + 2 + 3 = 6$ деревьев. Что мы узнали? Что за 12 дней всё семейство объест листья с 6 деревьев. Следовательно, листья с одного дерева они объедят за время, в 6 раз меньшее, то есть за 2 дня.



Групповая работа

2. Когда сток в бассейне закрыт, первая труба заполняет бассейн за 45 минут, вторая — за 36 минут. Вода из заполненного бассейна вытекает через сток за 60 минут. Определите, за какое время заполнится бассейн, если (а) обе трубы открыты, а сток закрыт; (б) открыты первая труба и сток? (в) открыты вторая труба и сток? (г) открыты обе трубы и сток?

Прежде всего, найдём общее кратное: это 3 часа = 180 минут. Что происходит за 3 часа? Первая труба заполняет 4 бассейна, вторая труба заполняет 5 бассейнов, и через сток выливается 3 бассейна. Запомним эти числа, записав их на доске в виде схемы или таблицы. Теперь можно отвечать на вопросы задачи.

А) За 180 минут заполнится $4 + 5 = 9$ бассейнов. Следовательно, 1 бассейн заполнится за 20 минут.

Б) За 180 минут заполнится $4 - 3 = 1$ бассейн. Мы сразу же получили ответ на вопрос задачи: 1 бассейн заполнится за 180 минут.

В) За 180 минут заполнится $5 - 3 = 2$ бассейна. Следовательно, 1 бассейн заполнится за 90 минут.

Г) За 180 минут заполнится $5 + 4 - 6 = 3$ бассейна. Следовательно, 1 бассейн заполнится за 60 минут.

3. Бабушка Васи, неподвижно стоящая на ступеньках эскалатора, поднимается вверх или же опускается вниз за 56 секунд. Вася взбегаёт вверх по неподвижному эскалатору за 42 секунды. Определите, за какое время Вася преодолеет движущийся эскалатор, если (а) он взбегаёт вверх по эскалатору, идущему вверх? (б) он взбегаёт вверх по эскалатору, идущему вниз?

Эта задача решается на основе той же самой идеи — с добавлением новых соображений, конечно. Прежде всего, найдём общее кратное. $56 = 4$ раза по 14, $42 = 3$ раза по 14; поэтому общее кратное равно 12 раз по 14 = 3 раза по 56 = 4 раза по 42 = 168 секунд. Что происходит за 168 секунд? Бабушка за это время может проехать 3 эскалатора. Вася за это же время может подняться на 4 эскалатора. Теперь можно отвечать на вопросы задачи. Для этого надо представить себе достаточно длинную ленту эскалатора, чтобы нам хватило места для всех манёвров; и пусть у этого эскалатора где-то имеется «стартовая площадка».

А) Когда Вася взбегаёт вверх по эскалатору, идущему вверх, пусть вместе с ним с этого же места стартует и бабушка. За 168 секунд бабушка поднимется вверх на 3 эскалатора; а Вася относительно бабушки поднимется ещё на 4 эскалатора. Значит, Вася поднялся от старта на 7 эскалаторов. А на один эскалатор он поднимется за время, в 7 раз меньшее, то есть за $168 : 7 = 24$ секунды.

Б) Когда Вася взбегаёт вверх по эскалатору, идущему вниз, пусть вместе с ним с этого же места стартует и бабушка. За 168 секунд бабушка спустится вниз на 3 эскалатора; а Вася относительно бабушки поднимется на 4 эскалатора. Значит, Вася поднялся от старта на 1 эскалатор. Вот мы и нашли, что Вася поднимается на 1 эскалатор за 168 секунд.

Парная работа

4. Бассейн заполняется водой из трёх труб. Первая труба может заполнить бассейн за 9 часов, вторая — за 12 часов, третья — за 18 часов. За какое время заполнят бассейн все три трубы вместе?

5. Мама с дочкой тратят на уборку квартиры 30 минут. Мама убирает квартиру за 50 минут. За сколько минут делает это дочка?

6. Чтобы испечь 20 блинов, маме требуется 30 минут, а Ане — 40 минут. Андрюша готов съесть 20 блинов за час. Мама с Аней пекут блины без остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется 20 блинов? (Будем считать, что Андрюша поедает блины с самой первой секунды процесса, хотя это в строгом смысле неверно.)

Разбор на общем заседании

7. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 км, а задние — через 15000 км. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стёрлись одновременно?

И опять та же самая идея. Общее кратное здесь равно 75000 км. Спросим себя, что происходит за это время? Отвечаем: за это время снашиваются 3 комплекта передних покрышек и 5 комплектов задних покрышек. Всего снашивается 8 пар покрышек, что составляет 4 полных комплекта. Стало быть, полный комплект при правильной замене сносится за $75000 : 4 = 18750$ км. А где надо делать эту замену? Очевидно, проехав половину расстояния, ведь тогда обе пары за полное расстояние сносятся одинаково. Стало быть, покрышки надо менять через $18750 : 2 = 9375$ км.

ВТОРОЙ ДЕНЬ

Разобранный пример

1. Тиран Поликрат однажды спросил у Пифагора, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат, — отвечал Пифагор. — половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трёх юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины». Сколько учеников было у Пифагора?

Мы знаем, что число учеников Пифагора делится нацело на 2, 4, 7. Какое наименьшее число делится на все эти числа? Если число делится на 4, оно же делится и на 2. Поэтому двойку пока что принимать в учёт не надо — у нас и так есть четвёрка. Чтобы число делилось на 4 и на 7, оно должно делиться на 28. Стало быть, мы уже знаем, что число учеников Пифагора делится на 28.

Допустим, что оно равно 28, и посмотрим, что у нас при этом получится. Тогда математику изучает 14 человек, тайны природы исследует 7 человек, силу духа упражняет 4 человека. Всего получилось $14 + 7 + 4 = 25$ человек. Неучтенными оказались $28 - 25 = 3$ человека. Но именно о 3 учениках говорит Пифагор — стало быть, у нас всё сошлось, и мы уже нашли правильный ответ: у Пифагора было 28 учеников.

Групповая работа

2. Делёж орехов

Рос орешник, и было на нём много-много орехов.
Но подошел к нему человек, и орешник промолвил:
«Пятую часть моих орехов взяла Парфенона,
Четверть взяла Аганиппа, потом Филинна — восьмую
Часть, потом Орифия — седьмую, потом Евринома
С веток моих собрала шестую долю орехов.
Трое Харит унесли сто шесть орехов, а девять
Муз забрали каждая по девять. Вот и осталось
Только семь орехов на самой дальней из веток!»

Мы знаем, что число орехов делится нацело на 4, 5, 6, 7, 8. Какое наименьшее число делится на все эти числа? Если число делится на 8, оно же делится и на 4. Поэтому 4 можно не принимать в учёт. Стало быть, остаются числа 5, 6, 7, 8. Числа 5 и 7 — простые. А вот 6 — это $2 \cdot 3$. Но 2 уже есть в составе 8, поэтому в чёт надо принимать только 3. Итак, $5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$. Мы знаем, что число орехов делится на 840.

Допустим, что оно равно 840. Тогда Парфенона взяла $840 : 5 = 168$ орехов, Аганиппа — $840 : 4 = 210$ орехов, Филинна — $840 : 8 = 105$ орехов, Орифия — $840 : 7 = 120$ орехов, Евринома — $840 : 6 = 140$ орехов. Это всё, что было выражено не в орехах, а в долях целого; всего здесь получается $168 + 210 + 105 + 120 + 140 = 743$ ореха. При этом остаток равен $840 - 743 = 97$ орехов.

А какой остаток получился в действительности? Хариты унесли 106 орехов, и Музы унесли 81 орех, и на ветках осталось 7 орехов; всего в числах выражено $106 + 81 + 7 = 194$ ореха. Это в 2 раза больше, чем 97. Стало быть, и орехов на орешнике было в 2 раза больше, чем 840: так что их было 1680.

3. Три автомобиля одновременно, из одной точки и в одном направлении, выехали по кольцевой трассе. Каждый автомобиль движется с постоянной скоростью. Проехав ровно 6 кругов, первый автомобиль впервые догнал второй, а проехав ровно 8 кругов — третий. Сколько кругов проедут второй и третий автомобили к моменту своей первой встречи?

Здесь надо удерживать в уме простое соображение: если в задаче сказано, что первый автомобиль догнал второй, проехав к этому времени 6 кругов, это означает, что второй автомобиль к этому же времени проехал на один круг меньше, то есть 5 кругов.

Будем решать задачу в нашем общем стиле. Прежде всего найдём НОК $(6, 8) = 24$. Теперь спросим себя, что произойдёт, когда первый автомобиль проедет 24 круга? За 6 кругов он обогнал второй автомобиль на круг, поэтому за 24 круга он обгонит второй автомобиль на 4 круга, и второй автомобиль проедет 20 кругов. За 8 кругов он обогнал третий автомобиль на круг, поэтому за 24 круга он обгонит третий автомобиль на 3 круга, и третий автомобиль проедет 21 круг. Стало быть, когда первый автомобиль проедет 24 круга, второй автомобиль проедет 20 кругов, а третий автомобиль — 21 круг. Но при этих условиях второй и третий автомобиль как раз встретятся в первый раз, поскольку произойдёт первый обгон.

Парная работа

5. Гробница Диофанта

Здесь погребён Диофант. Дивись великому чуду:
Числа на этой плите скажут усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Часть седьмая прошла — и с подругою он обручился;
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Бедный сын! Вдвое меньше отца он прожил на свете,
И возложили его на погребальный костер.
Дважды два года ещё отец оплакивал сына;
Тут и нашел он конец жизни печальной своей.

То же рассуждение, что и в задачах 1, 2.

6. Пароход от Нижнего Новгорода до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Нижнего Новгорода 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Что нам напоминает эта задача? Решали ли мы нечто подобное ранее? Конечно же, это задача про бабушку и Васю на эскалаторе! Река — это лента эскалатора, пароход — это Вася, который бежит по движущемуся эскалатору, а бабушка плывёт на плоту: ведь плот плывёт со скоростью течения.

НОК (7, 5) = 35. За 35 суток Вася на пароходе спустится на 7 рек; за следующие 35 суток он поднимется на 5 рек; то есть он за 70 суток спустится вниз на 2 реки. Первые 35 суток он убегал от бабушки вниз по эскалатору, вторые 35 суток — поднимался вверх по эскалатору с той же скоростью; стало быть, через 70 суток он вернулся к бабушке. Получается, что за 70 суток бабушка на плоту спустится вниз на 2 реки. Поэтому плот опускается на одну реку за $70 : 2 = 35$ суток.

7. Три колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами составляют 4 секунды, 5 секунд и 6 секунд. Совпавшие удары воспринимаются за один. Сколько ударов будет услышано за 3 минуты, включая первый и последний удар?

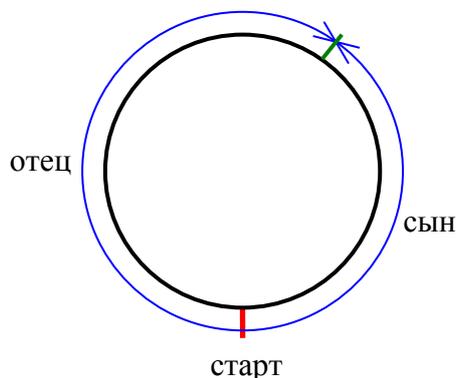
НОК (4, 5, 6) = 60. Стало быть, через 60 секунд все три колокола снова ударят одновременно. Получается, что каждая минута внутри устроена одинаково. Так что нам нужно найти число отдельных ударов внутри минуты, умножить его на 3 и прибавить 4 граничных удара.

Первый колокол бьёт внутри минуты $60 : 4 - 1 = 14$ раз, второй — $60 : 5 - 1 = 11$ раз, третий — $60 : 6 - 1 = 9$ раз; всего $14 + 11 + 9 = 34$ раза. Но некоторые удары были двойными, и мы их посчитали дважды. Первый и второй колокол бьют вместе каждые 20 секунд, таких ударов внутри минуты 2; первый и третий колокол бьют вместе каждые 12 секунд, таких ударов внутри минуты 4; второй и третий колокол бьют вместе каждые 30 секунд, таких ударов внутри минуты 1; всего двойных ударов $2 + 4 + 1 = 7$. Так что внутри каждой минуты раздельно звучат $34 - 7 = 27$ ударов. За три минуты прозвучит $3 \cdot 27 + 4 = 85$ ударов.

Разбор

8. Отец и сын катаются по кругу на катке. Время от времени отец обгоняет сына. Когда отец стал ездить по кругу в другую сторону, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегаёт быстрее сына?

Посмотрим, что происходит когда отец и сын едут в разные стороны. Вот они выехали со старта и встретились. В духе вчерашних задач про совместную трапезу мы можем сказать, что они вдвоём «съели 1 круг»! А когда они ехали в разные стороны, до первой встречи они ехали в пять раз большее время; значит, они вместе «съели 5 кругов»! Теперь всё понятно: поскольку один из них проехал на круг больше другого (это мы уже выяснили сегодня в третьей задаче), значит отец проехал 3 круга, а сын — 2 круга. Поэтому отец ездит в полтора раз быстрее сына.



ТРЕТИЙ ДЕНЬ

1. Найдите наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 остаток, равный 1.

Если от искомого числа отнять 1, результат будет делиться на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ясно, что если число делится на 8, оно делится также на 2 и 4; и если число делится на 6, оно делится также на 2 и 3. Так что нам нужно найти НОК (5, 6, 7, 8). Чтобы число делилось на 6 и 8, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и 8. Таким образом, надо образовать произведение $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$. Искомое число равно 841.

2. Найдите все трёхзначные числа, которые при делении на каждое из чисел 3, 5, 7 дают в остатке 2.

Аналогичное рассуждение.

3. Вдоль шоссе поставили 2008 столбов освещения. В первый вечер горели лампы на всех столбах, во второй — на каждом втором по счёту столбе, в третий — на каждом третьем, в четвёртый — на каждом четвёртом, в пятый — на каждом пятом, в шестой — на каждом шестом, в седьмой — на каждом седьмом столбе. На каком количестве столбов лампы горели каждый вечер?

Аналогичное рассуждение.

4. Имеются две шестерёнки — у первой 120 зубцов, у второй 14 зубцов. Первая шестерёнка закреплена неподвижно, а вторая может кататься вокруг первой. Один из зубцов второй шестерёнки окрашен; соприкасаясь с первой шестерёнкой, он оставляет на ней отметку. Сколько раз прокатится вторая шестерёнка по первой, прежде чем окрашенный зубец попадёт в уже отмеченную ранее точку? Сколько всего таких отметок оставит вторая шестерёнка на первой?

Для начала раскатаем одну из шестерёнок в «зубчатую линейку». НОК (120, 14) = $120 \cdot 7 = 14 \cdot 60$. Это означает, что 7 больших шестерёнок равны 60 малым. Система вернётся в первоначальное положение, когда малая шестерёнка сделает 60 оборотов, прокатившись 7 раз вокруг большой шестерёнки. При этом окажутся покрашенными все впадины большой шестерёнки через одну.

Теперь надо завернуть линейку обратно в круг. Каждый такой круг даёт ещё один оборот малой шестерёнки. Так что малая шестерёнка делает 67 оборотов вокруг своей оси.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРУСЕЛЬ

1. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова — за 3 суток, овца — за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе? **(1 сутки)**

2. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а его сыну для этого требуется 120 минут. За сколько минут они вымоют трёх слонов, работая вдвоём? **(90 минут)**

3. В пустой бассейн, вмещающий 10000 ведер воды, проведены для его наполнения три трубы. Посредством первой трубы в 1 минуту вливается 32 ведра, посредством второй — 5 ведрами более, нежели через первую, а через третью трубу в 1 минуту вливается столько же ведер, сколько через первую в 3 минуты. Все трубы были открыты одновременно и действовали в течение 55 минут. Сколько ведер воды надо после этого ещё добавить, чтобы бассейн был наполнен? **(925 вёдер)**

4. Кот Матвей выпивает 1 литр молока за 6 дней, кошка Мурка — за 10 дней, а котёнку Ваське его хватило бы на 15 дней. Сколько литров молока нужно этим кошкам на неделю? **(2½ литра)**

5. На столе лежат книги, число которых меньше, чем 100. Сколько лежит книг, если известно, что их можно связывать пачки по 3, по 4, и по 5 штук? **(60 книг)**

6. Лошадь, пони и верблюд съедают одну охапку сена за 30 минут, лошадь и верблюд — за 40 минут. Сколько времени будет есть охапку сена пони? **(120 минут)**

7. Лошадь и пони съедают 1 стог сена за 12 дней, верблюд и пони — за 6 дней, лошадь и верблюд — за 4 дня. На сколько дней хватит 1 стога всем трои животным? **(4 дня)**

8. Один насос может выкачать в течение 5 часов $\frac{10}{21}$ бассейна, другой насос в течение 7 часов выкачивает $\frac{14}{23}$ бассейна и третий в 2 часа выкачивает $\frac{3}{10}$ бассейна. Который насос действует с большей силой? **(третий)**

9. Пузырь, Соломинка и Лапоть переправляются через речку. Если будет грести только Соломинка, они переправятся за 1 час. Лапоть гребёт в 4 раза сильнее Соломин-

ки, а Пузырь — в 3 раза сильнее Соломинки. За сколько минут они переправятся через речку, если будут грести втроём? **(7 минут 30 секунд)**

10. Пятачок съедает за 60 минут полторы банки сгущёнки, Крошка Ру — половину банки, а Вيني-Пух — 3 банки. За сколько минут они съедят одну банку сгущёнки втроём? **(12 минут)**

11. Верблюд съедает воз сена за 16 дней, а верблюд и тапир вместе — за 12 дней. На сколько дней хватает воза сена тапиру? **(48 дней)**

12. Вода поступает в бассейн через четыре трубы. Если открыты первая, вторая и третья трубы, бассейн заполняется за 12 минут; если открыты вторая, третья и четвёртая трубы — за 15 минут; если первая и четвёртая — за 20 минут. За какое время заполняется бассейн, если открыты все четыре трубы? **(10 минут)**

13. Пятачок съедает горшок мёда за 30 дней, кролик — за 15 дней. За сколько дней съедает горшок мёда Вيني-Пух, если все вместе они съедают горшок мёда за 5 дней? **(10 дней)**

14. Коза и корова съедают воз сена за 45 дней, корова и овца — за 60 дней, а овца и коза — за 90 дней. За сколько дней съедят воз сена коза, овца и корова вместе? **(40 дней)**

15. Теплоход «Суворов» свой рейс туда и обратно совершает за 8 дней, теплоход «Горький» за 12 дней, а теплоход «Киров» за 18 дней. Через сколько дней теплоходы снова встретятся в порту, если они ушли в рейс одновременно? **(72 дня)**

16. В детском велосипеде шестерня заднего колеса имеет 21 зубец, а шестерня педали 44 зубца. Какое наименьшее число оборотов должна сделать педаль, чтобы шестерни вернулись в свое первоначальное положение? **(21 оборот)**

17. Саша ходит в бассейн один раз в 3 дня, Вася — один раз в 4 дня, Ваня — один раз в 5 дней. Они встретились в бассейне в понедельник. В какой день недели они встретятся в следующий раз? **(в пятницу)**

18. Работник выполнил $\frac{3}{7}$ работы за 1 час 15 мин. За сколько времени он окончит остальную часть работы? **(1 час 40 минут)**

19. Писец может написать в день 7 листов, а его сын только 4 листа. В течение первых 6 дней занимался перепиской только один сын, после чего стал помогать ему и отец, чтобы окончить работу к сроку. По окончании работы оказалось, что оба написали по одинаковому числу листов. Сколько всего листов было ими написано? **(112 листов)**

20. Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой? **(1 час 20 минут)**